Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 27.09.2013.

Pismeni ispit iz predmeta Diferencijalna geometrija

Bitna napomena: Obavezno napisati formulu koju koristite i značenja simbola iz napisane formule, u sva četri zadatka. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Data je kriva

$$L : x = a\cos^2 u,\ \ y = a\sin u\cos u,\ \ z = a\sin u$$

(a) Pokazati da kriva L leži u presjeku jedne lopte i cilindra čija je generatrisa paralelna osi $0z$ i odrediti jednačine tih površi.
(b) Odrediti jednačinu oskulatorne ravni krive L za $u = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Neka je data kriva

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t\ \cos t,\quad y = a\,\mathrm{ch}\,t\ \sin t,\quad z = at,$$

i neka je A presječna tačka normalne ravni na krivu sa $0z$-osom. Izračunati udaljenost d između proizvoljne tačke na krivoj i tačke A.

3. Date su površi Γ i kriva L:

$$\Gamma : \vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, au\}$$

$$L : \vec{r} = \{e^t\cos bt, e^t\sin bt, ae^t\}$$

gdje su a i b proizvoljne konstante.
(20%)(a) Napisati jednačinu površi Γ u obliku $F(x, y, z) = 0$.
(20%)(b) Dokazati da kriva L leži na površi Γ. Na kom njenom dijelu?
(60%)(c) Dokazati da je u proizvoljnoj tački na L ugao između L i v linije koja prolazi kroz tu tačku, konstantan.

4. Odrediti asimptotske linije i linije krivina površi Γ

$$\Gamma : \vec{r} = \{u\cos v, u\sin v, au\}$$

i njihove projekcije na koordinatnu ravan $x0y$. Koje su to krive?

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Data je kriva

$$L: x=a\cos^2 u, \quad y=a\sin u\cos u, \quad z=a\sin u$$

a) Pokazati da kriva L leži u presjeku jedne lopte i cilindra čija je generatrisa paralelna osi Oz i odrediti jednačine tih površi.

b) Odrediti jednačinu oskulatorne ravni krive L za $u=\frac{\pi}{2}$.

Rj. a) Primjetimo da je

$$x^2+y^2+z^2 = a^2\cos^4 u + a^2\sin^2 u\cos^2 u + a^2\sin^2 u =$$

$$= a^2\cos^2 u\underbrace{(\cos^2 u+\sin^2 u)}_{=1} + a^2\sin^2 u =$$

$$= a^2(\cos^2 u+\sin^2 u) = a^2$$

tj. $x^2+y^2+z^2=a^2$ – jednačina sfere

i

$$x^2+y^2 = a^2\cos^4 u + a^2\sin^2 u\cos^2 u = a^2\cos^2 u(\cos^2 u+\sin^2 u)$$

$$= a^2\cos^2 u = a\cdot\underbrace{a\cos^2 u}_{x} = ax$$

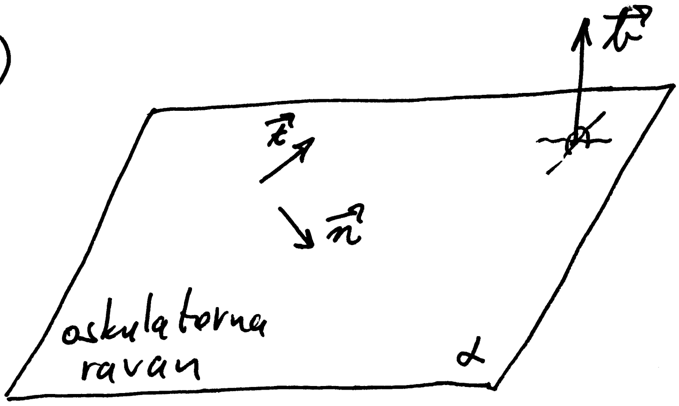
tj.

$x^2+y^2=ax$ – jednačina cilindrične površi čija je generatrisa paralelna osi Oz.

Vidimo da je kriva L određena presjekom ove dvije površi.

$$L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$$

b)



$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{r}} = \{-2a\sin u\cos u,\ a(\cos^2 u-\sin^2 u),\ a\cos u\}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \{-2a\cos 2u,\ -2a\sin 2u,\ -a\sin u\}$$

Za $u=\frac{\pi}{2}$ je

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= (0,-a,0) \\ \ddot{\vec{r}} &= (2a,0,-a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} =$$

$$\vec{r} = (0,0,a)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -a & 0 \\ 2a & 0 & -a \end{vmatrix} = (a^2, 0, 2a^2)$$

Vidimo da je $M(0,0,a)$ proizvoljna tačka krive

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

$$a^2(x-0)+0\cdot(y-0)+2a^2(z-a)=0 \qquad /:a^2$$

$$x+2z-2a=0$$

je tražena jednačina oskulatorne ravni

(#) Neka je data kriva $x = a\,\mathrm{ch}\,t \cos t$, $y = a\,\mathrm{ch}\,t \sin t$, $z = at$, i neka je A presječna tačka normalne ravni na krivu sa Oz-osom. Izračunati udaljenost d između (proizvoljne) tačke na krivoj u kojoj smo odredili normalnu ravan i tačke A.

Rj. Jednačina normalne ravni u tački (x_0, y_0, z_0) je

$$\dot{x}(x - x_0) + \dot{y}(y - y_0) + \dot{z}(z - z_0) = 0 \qquad \ldots (1)$$

Presječna tačka A normalne ravni i ose Oz mora biti oblika $A(0, 0, z_1)$, gdje je z_1 tražena vrijednost. Ako tačku $A(0,0,z_1)$ uvrstimo u jednačinu normalne ravni (1) imamo:

$$\dot{x}(0 - x_0) + \dot{y}(0 - y_0) + \dot{z}(z_1 - z_0) = 0$$

$$\dot{z} z_1 - \dot{z} z_0 = \dot{x} x_0 + \dot{y} y_0$$

$$z_1 = \frac{\dot{x} x_0 + \dot{y} y_0 + \dot{z} z_0}{\dot{z}}$$

Za proizvoljnu tačku (x_0, y_0, z_0) ćemo uzeti $(a\,\mathrm{ch}\,t \cos t, a\,\mathrm{ch}\,t \sin t, at)$. Tada

$$\dot{x} = a\,\mathrm{sh}\,t \cos t - a\,\mathrm{ch}\,t \sin t$$

$$\dot{y} = a\,\mathrm{sh}\,t \sin t + a\,\mathrm{ch}\,t \cos t$$

$$\dot{z} = a$$

$$\boxed{\mathrm{sh}^2 t + 1 = \mathrm{ch}^2 t}$$

$$\dot{x} x_0 + \dot{y} y_0 + \dot{z} z_0 = a^2 \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t \cos^2 t \underline{- a^2 \mathrm{ch}^2 t \sin t \cos t}$$

$$+ a^2 \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t \sin^2 t \underline{+ a^2 \mathrm{ch}^2 t \sin t \cos t} + a^2 t =$$

$$= a^2 \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + a^2 t$$

$$z_1 = a\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + at$$

Koordinate tačke A su $A(0, 0, a\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + at)$.

Neka je $B(a\,\mathrm{ch}\,t \cos t, a\,\mathrm{ch}\,t \sin t, at)$ proizvoljna tačka na krivoj

$$d = |AB| = \sqrt{a^2 \mathrm{ch}^2 t \cos^2 t + a^2 \mathrm{ch}^2 t \sin^2 t + a^2 \mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t} = \sqrt{a^2 \mathrm{ch}^2 t + a^2 \mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t}$$

$$= a\,\mathrm{ch}\,t \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 t} = a\,\mathrm{ch}^2 t$$

tražena udaljenost

(#) Date su površi Γ i kriva L:

$$\Gamma: \ \vec{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ au\}$$
$$L: \ \vec{r} = \{e^t\cos bt,\ e^t\sin bt,\ ae^t\}$$

(a) Napisati jednačinu površi Γ u obliku $F(x,y,z)=0$.

(b) Dokazati da kriva L leži na površi Γ. Na kom njenom dijelu?

(c) Dokazati da je u proizvoljnoj tački na L ugao između L i v-linije koja prolazi kroz tu tačku konstantan.

Rj.:

(a)

$$\Gamma: \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = au \end{cases}$$

$$x^2+y^2 = u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v = u^2$$
$$x^2+y^2 = u^2 \Rightarrow a^2(x^2+y^2) = a^2u^2 \quad \ldots(1)$$
$$z^2 = a^2u^2 \quad \ldots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$

$$a^2(x^2+y^2) - z^2 = 0$$

(b)

$$L: \begin{cases} x = e^t\cos bt \\ y = e^t\sin bt \\ z = ae^t \end{cases}$$

Ako uvrstimo koordinate proizvoljne tačke krive L u jednačinu površi Γ imamo

$$a^2(e^{2t}\cos^2 bt + e^{2t}\sin^2 bt) - a^2e^{2t} = a^2e^{2t} - a^2e^{2t} = 0$$

Kako sve tačke krive L pripadaju površi Γ to kriva L leži na površi Γ. Kako je $z = ae^t$ i $a>0$ to je $z>0$

za sve tačke krive L, kriva L je na ovom dijelu površi Γ koji je iznad xOy ravni.

(c)

Koordinatne v-linije površi Γ dobijemo kada za promjenjivu u stavimo neku konstantu npr. c

v-linije su oblika
$$\begin{cases} x = c\cos v \\ y = c\sin v \\ z = ac \end{cases}$$

Ugao između proizvoljne tačke na L i v-linije koja prolazi kroz tu tačku je ugao između tangente na L u toj tački i tangente na v-liniju u toj tački. Vektori ovih tangenti ćemo, redom, označiti sa $\vec{t_1}$ i $\vec{t_2}$

$$\vec{t_1} = \{ e^t(\cos bt - b\sin bt),\ e^t(\sin bt + b\cos bt),\ ae^t \}$$

$$\vec{t_2} = \{ -c\sin v,\ c\cos v,\ 0 \} \quad (c = \text{const.}).$$

$$\vec{t_1} \cdot \vec{t_2} = e^t(-c\sin v\cos bt + bc\sin v\sin bt + c\sin bt\cos v + bc\cos v\cos bt + 0)$$

Ako je M zajednička tačka krivoj L i liniji v imamo

$$\begin{aligned} u\cos v &= e^t\cos bt \\ u\sin v &= e^t\sin bt \\ au &= ae^t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u &= e^t \\ v &= bt \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= \ln u \\ v &= b\ln u \end{aligned}$$

U našem slučaju za u smo uzeli c pa je $t = \ln c$, $v = b\ln c$.

Sad ako u tački M izračunamo $\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2$ imamo

$$\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 = c\,\big(\underline{-c\sin(b\ln c)\cos(b\ln c)} + bc\sin(b\ln c)\,(b\ln c)$$
$$\underline{+\,c\sin(b\ln c)\cos(b\ln c)} + bc\cos(b\ln c)\cos(b\ln c)\big)$$

$$= c\cdot bc = bc^2$$

Slično

$$|\vec{r}_1|^2 = e^{2t}\big(\cos^2 bt\ \underline{\cancel{-2b\cos bt\sin bt}} + b^2\sin^2 bt$$
$$+\sin^2 bt\ \underline{\cancel{+2b\sin bt\cos bt}} + b^2\cos^2 bt + a^2\big) =$$
$$= e^{2t}(1+b^2+a^2)$$

$|\vec{r}_1| = e^t\sqrt{1+b^2+a^2}$ a kako je $t=\ln c$ to je

$$|\vec{r}_1| = c\sqrt{1+b^2+a^2}$$

$$|\vec{r}_2|^2 = c^2\sin^2 v + c^2\cos^2 v = c^2 \Rightarrow |\vec{r}_2| = c$$

Prema tome

$$\cos\sphericalangle(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}{|\vec{r}_1|\,|\vec{r}_2|} = \frac{b}{\sqrt{1+b^2+a^2}} = \text{konst.}$$

(#) Odrediti asimptotske linije i linije krivina površi Π

$$\Pi: \vec{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,\ au\}$$

i njihove projekcije na koordinatnu xOy ravan. Koje su to krive?

Rj. Koeficijenti prve kvadratne forme su E, F i G

$$E = (\vec{r}_u')^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + a^2 = 1 + a^2$$

$$F = (\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v') = (\cos v, \sin v, a) \cdot (-u\sin v, u\cos v, 0) = 0$$

$$G = (\vec{r}_v')^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v = u^2$$

Druga osnovna forma površi je

$$F_2 = (d^2\vec{r} \cdot \vec{n}_0) = -(d\vec{r} \cdot d\vec{n}_0) = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

gdje je
$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{\sqrt{EG - F^2}}$$

i $d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}''\,du^2 + 2\vec{r}_{uv}''\,du\,dv + \vec{r}_{vv}''\,dv^2$

$\vec{r}_u' = (\cos v, \sin v, a)$ $\qquad \vec{r}_{uu}'' = (0, 0, 0)$ $\quad / du^2$

$\vec{r}_v' = (-u\sin v, u\cos v, 0)$ $\qquad \vec{r}_{uv}'' = (-\sin v, \cos v, 0)$ $\quad / \cdot 2\,du\,dv$

$\vec{r}_{vv}'' = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$ $\quad / dv^2$

$$\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & a \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-au\cos v, -au\sin v, u)$$

$$d^2\vec{r} = (-2\sin v\, du\, dv - u\cos v\, dv^2,$$
$$2\cos v\, du\, dv - u\sin v\, dv^2,\ 0)$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{u^2(1+a^2)} = |u|\sqrt{1+a^2}$$

$$F_2 = d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = d^2\vec{r}\cdot\frac{\vec{n}}{\vec{n}_0} = d^2\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$= \frac{1}{|u|\sqrt{1+a^2}}(-2\sin v\, du\, dv - u\cos v\, dv^2,\ 2\cos v\, du\, dv - u\sin v\, dv^2,\ 0)\cdot$$
$$\cdot(-au\cos v, -au\sin v, u) =$$

$$= \frac{1}{|u|\sqrt{1+a^2}}(\underline{+2au\sin v\cos v\, du\, dv} + au^2\cos^2 v\, dv^2$$
$$\underline{-2au\sin v\cos v\, du\, dv} + au^2\sin^2 v\, dv^2 + 0)$$

$$= \frac{1}{|u|\sqrt{1+a^2}}au^2\, dv^2 = \frac{au^2}{\sqrt{u^2(1+a^2)}}dv^2$$

tj. $F_2 = \frac{au^2}{\sqrt{u^2(1+a^2)}}dv^2 \Rightarrow L=0,\ M=0,\ N=\frac{au^2}{\sqrt{u^2(1+a^2)}}$

Diferencijalna jednačina asimptotske linije je $F_2=0$ tj.

$$\frac{au^2}{\sqrt{u^2(1+a^2)}}dv^2 = 0$$

$dv=0 \Rightarrow v=C$ tj. asimptotske linije površine su u linije $\vec{r}=(u\cos C, u\sin C, au)$

Diferencijalna jednačina linije krivine je

$$d\vec{r} \cdot (\vec{n} \times d\vec{n}) = 0$$

ili što je ekvivalentno

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 .$$

U našem slučaju

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ 1+a^2 & 0 & u^2 \\ 0 & 0 & \frac{au^2}{\sqrt{u^2(1+a^2)}} \end{vmatrix} = \frac{au^2}{\sqrt{u^2(1+a^2)}}(1+a^2)\,du\,dv = 0$$

$$\Downarrow$$

$$du\,dv = 0$$

$\rightarrow$ $du = 0$ ili $dv = 0$

$u = C_1$ $\quad$ $v = C_2$

Linije krivine su koordinatne linije

$$\vec{r}_1 = \{C_1 \cos v,\ C_1 \sin v,\ au\}$$
$$\vec{r}_2 = \{u \cos C_2,\ u \sin C_2,\ aC_2\}$$

Projekcije asimptotskih linija na ravan xOy su prave kroz koordinatni početak $y = \frac{\sin C}{\cos C}x$, a linija krivina, ove prave i kružnice $x^2+y^2 = C_1^2$.